Compte-rendu à 18 mois
Projet FOST (ANR- 08-BLAN-0246-01)

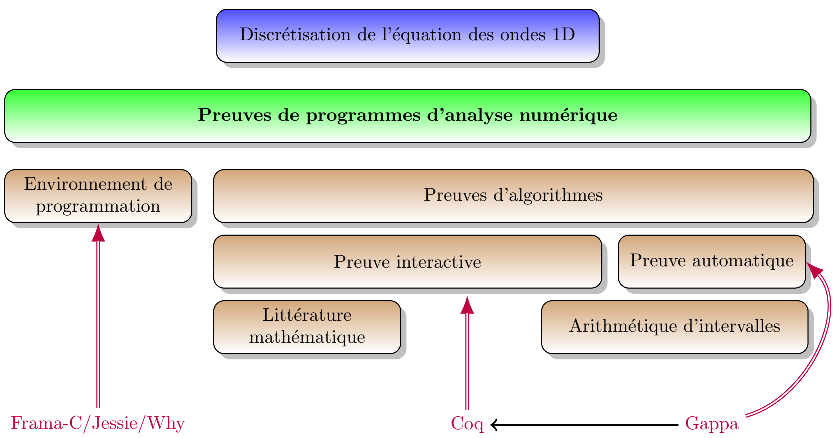
Sylvie Boldo

30 juillet 2010

1 Introduction

Le projet FOST (Formal prOofs about Scientific compuTations) a commencé en janvier 2009. Ce petit projet ne comportait au début que 4 chercheurs : S. Boldo (INRIA Saclay) et J.-C. Filliâtre (CNRS, LRI) pour le partenaire 1 ; F. Clément (INRIA Rocquencourt) pour le partenaire 2 ; M. Mayero (Université Paris 13) pour le partenaire 3. En cours de route se sont ajoutés G. Melquiond (INRIA Saclay) et pour le partenaire 1 et P. Weis (INRIA Rocquencourt) pour le partenaire 2.

Voici un récapitulatif des outils et buts :



L'objectif principal est la preuve de programmes d'analyse numérique. Les outils (dessous, en marron) sont multiples : littérature mathématique, logiciels de preuves formelles, arithmétique d'intervalles. . .Comme premier objectif, nous avons choisi un cas d'étude que nous avons étudié en profondeur.

2 Cas d'étude

Nous avons travaillé sur un schéma aux différences finies de l'équation des ondes en une dimension.

Nous cherchons une fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière telle que :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = s(x,t)$$

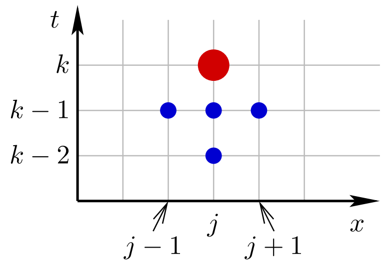
étant données des valeurs initiales pour $u(x,0)$ et $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}(x,0)$.

Cette équation aux dérivées partielles est assez simple mais très utile dans de nombreux domaines (oscillation de corde, propagation du son, radar, recherche de pétrole).

Cette équation aux dérivées partielles est approximée par un schéma numérique à 3 points :

$$\frac{u_j^k - 2u_j^{k-1} + u_j^{k-2}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^{k-1} - 2u_j^{k-1} + u_{j-1}^{k-1}}{\Delta x^2} = s_j^{k-1}$$

Pour connaître la position de la corde au temps $k+1$ (gros point rouge), on a besoin des positions de la corde au temps k au même endroit, à sa gauche et à sa droite, ainsi que de la position au même endroit au temps $k-1$ (petits points bleus).
Des formules similaires permettent d'initialiser le schéma.



L'étude du programme résolvant cette équation différentielle se divise alors en 2 parties : l'erreur de méthode due à la discrétisation de l'équation aux dérivées partielles par un schéma numérique et l'erreur d'arrondi due à la précision finie des calculs en virgule flottante (seulement 53 bits en précision `double`).

2.1 Erreur de méthode

Basée sur une littérature mathématique existante, cette partie se devait d'être une transcription formelle de preuves existantes. Il n'en a rien été. Les preuves mathématiques se sont révélées insuffisantes et truffées de manques. Plus précisément, il est impossible de savoir quelles sont les conditions nécessaires sur u pour prouver la convergence du schéma. Ces conditions sont en fait assez restrictives (en particulier des conditions de convergence uniforme du développement de Taylor) et permettent ainsi d'échanger des quantificateurs (ce qui est strictement interdit sinon, car incorrect). Il nous a fallu un temps certain pour isoler les hypothèses suffisant à obtenir une preuve formelle complète.

2.2 Erreur d'arrondi

Très peu de littérature existait dans ce domaine et les méthodes usuelles nous ont fourni des bornes d'erreurs très importantes : au bout de k itérations, une erreur d'arrondi de l'ordre de $2^k 2^{-53}$. Nous avons développé une technique complexe permettant de donner une expression précise de l'erreur d'arrondi, ce qui a permis de profiter des très importantes compensations entre ces erreurs. Nous avons prouvé formellement que l'erreur est en fait de l'ordre de $k^2 2^{-53}$, ce qui est une borne raisonnable.

3 Conclusion

Toutes ces preuves ont été formalisées en utilisant Coq et sont disponibles sur le site du projet `http://fost.saclay.inria.fr`.

Ce travail est novateur car aucune preuve de ce type n'avait été réalisée auparavant, avec la garantie extrême qu'offrent les preuves formelles. Vu la très grande utilisation des schémas numériques approximant les équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, le champ d'application est énorme et la sûreté apportée est un avantage décisif.

Ce travail est reconnu car il a donné lieu à 2 publications directes (conférences très sélectives ITP –anciennement TPHOL– et ICALP) et 2 sur des sujets liés (journal très sélectif IEEE-TC et conférence Calculemus) ainsi que des actions de vulgarisation.

Enfin, ce travail est pionnier : il intéresse d'autres équipes internationales ; d'autres projets liés ont émergés (comme ForMath `http://wiki.portal.chalmers.se/cse/pmwiki.php/ForMath`).